実戦数的推理

今回のテーマ

場合の数・順列・組合せ

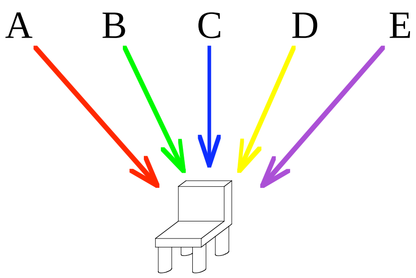
１． 基礎事項の解説

場合の数・順列・組合せの問題は、条件を満たすものをもれなく数える事が基本的な解法となる。従って、場合分けを的確に行うことと順列や組合せの考え方をしっかりと理解してそれをいかに応用するかが解答への近道となる。また、問題のパターンは多くあるので、できるだけ色々な問題にあたって慣れる必要がある。

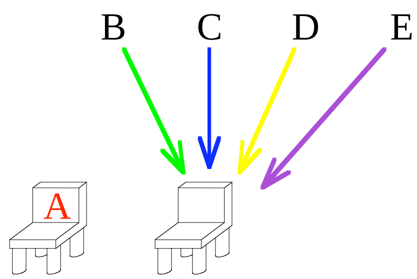
順列の基本的な考え方

いまここにＡ～Ｅの５人がいるとする。この５人のうちから３人を選んで並べるときに、何通りの並べ方があるかを考えよう。

まず５人のうちから１人の選び方は、５通りある。（ここでは、仮にＡが選ばれたとする。）



そしてこの１人を１番目に並べると、誰が選ばれたとしても、残りは必ず４人となる。次に、この４人から１人の選び方は４通りある。（ここではＢが選ばれたとする。）

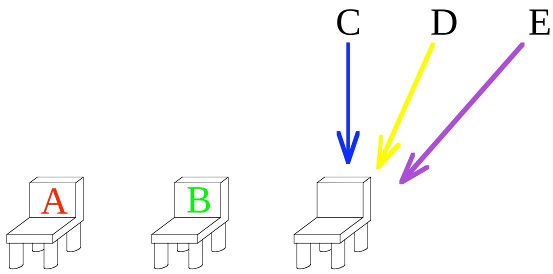


同じ様に、この１人を２番目に並べる。このとき、最初の１人を並べたときの５通りに対して、それぞれ必ず４通りずつあるから、ここまでで

$5 \times 4 = 20$ 通り

の並べ方がある。

次に、残り３人のうちから１人の選び方は３通りである。



この時、前の２０通りのそれぞれに対して３通りずつあるから、結果、

５×４×３＝60 通り

　このように、いくつかの異なる物や人から、決められた数だけ選んで並べるときの方法を順列といい、ｎ個のものからｒ個を選んで並べるとき、これを${}_nP_r$と書き表す。

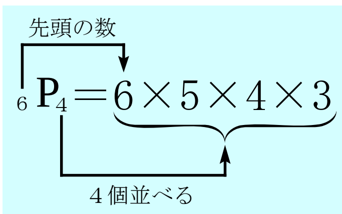
例１）６人の人がいる。ここから４人選んで並べる方法は何通りあるか。

解説）正答 360 通り

　６人から４人を選んで並べるから${}_6P_4$である。この時、一人目の選び方は６通り、２人目の選び方は５通り、３人目の選び方は４通り、４人目の選び方は３通りである。よって、次のようになる。

$${}_6P_4 = 6\times5\times4\times3 = 360\text{ 通り}$$

　ここで、記号から計算式の作り方を覚えておこう。次の通りである。



例２）１～10 の数字が書かれたカードが１枚ずつ、全部で 10 枚ある。ここから３枚のカードを選んで並べるとき何通りの並べ方があるか。

解説）正答 720 通り

　10 人の人から３人選んで並べることと同じである。よって、${}_{10}P_3$と書ける。よって、計算は次のようになる。

$${}_{10}P_3 = 10\times9\times8 = 720\text{ 通り}$$

※　ｎ個の異なる物からｎ個全てを並べるとき、次のようになる。

$${}_nP_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1$$

　このように、ある数から下に１までを順に掛ける計算の仕方を、ｎ！と書き“階乗(かいじょう)”と読む。

$${}_nP_n = n!$$

組合せの基本的な考え方

　ｎ人のうちからｒ人を選び、これを並べるのではなく、ただ単に１つのグループを作るとき、これを組合せという。ｎ人からｒ人を選ぶときの組合せを、記号では${}_nC_r$と書き表す。組合せは順列から求めることが出来る。

　順列の求め方は次の通り。

　　①　ｎ人からｒ人を選ぶ

　　②　ｒ人を並べる

①　「ｎ人からｒ人を選ぶ」ことは「組合せ」そのものであるから、これを${}_nC_r$とする。

②　次に、この選ばれたｒ人をならべるとき、その並べ方は、ｒ人からｒ人を並べることになるから${}_rP_r = r!$通りの並べ方がある。

　よって、次の式が成り立つ。

$${}_nP_r = {}_nC_r \times {}_rP_r = {}_nC_r \times r!$$

　この式を変形すると、

$$\therefore\ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r}$$

例３）５人から３人を選ぶ組合せを求めよ。

解説）正答　10 通り

$${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10\text{ 通り}$$

ここで、記号から計算式の作り方を覚えておこう。

先頭の数

$${}_5C_3 = \frac{\overbrace{5\times4\times3}^{\text{分母と同じ数だけ並べる}}}{\underbrace{3\times2\times1}_{\text{３から３個並べる}}}$$

例４）１～10 の数字が書かれたカードが１枚ずつ、全部で 10 枚ある。ここから３枚のカードを選ぶ組合せは何通りあるか。

解説）正答　120 通り

$${}_{10}C_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120\text{ 通り}$$

２．初級レベルの問題と解説

〔No. １〕７人の人が５人と２人に分かれてタクシーに乗るときの分かれ方は何通りあるか。

１．１５通り

２．１７通り

３．１９通り

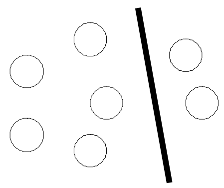
４．２１通り

５．２３通り

〔No.１　解説〕正答４

基礎的な組合せの問題であるが、組合せの性質を知っていると、計算が簡単になるのでそれを示す。

７人を５人と２人に分けるということは、図のように５人と２人の２つのグループに分けることである。



この図から、５人を選べば残り２人は自動的に決まるから７人から５人を選んで組み合わせることと、７人から２人を選んで組み合わせることは全く同じ事であることがわかる。つまり、

$${}_{7}C_{5} = {}_{7}C_{2}$$

である。そこで計算が簡単な方を選ぶと、

$${}_{7}C_{2} = \frac{{}_{7}P_{2}}{{}_{2}P_{2}} = \frac{7\times 6}{2\times 1} = 21\text{通り}$$

〔No.　２〕３人の男性Ａ～Ｃと２人の女性Ｄ、Ｅが円形のテーブルに座る。Ａが窓に一番近い席に座り、女性２人が隣り合わないような座り方は何通りあるか。

１．12 通り

２．14 通り

３．16 通り

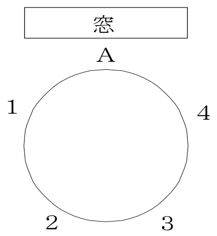
４．18 通り

５．20 通り

〔No.　２　解説〕正答１

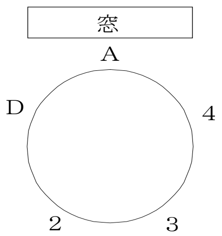
「Ａが窓に一番近い席に座る」という条件は、Ａの座る場所が１通りに決まっているということである。さてつぎに女性２人が隣り合わないように座るのはどう考えたら良いか?

女性が隣り合わないということは、女性２人の間に男性が必ず１人はいるということである。そこで、席の番号を仮に１～４と決めて場合分けして考える。

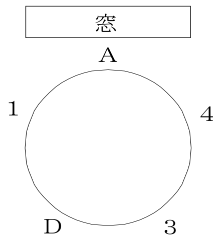


１）Ｄが１に座るとき

隣の２の席はＢかＣのいずれかでなければならず、２通り。２の席が決まれば、残りの３と４の席は残りの２名が座れば良いので、２×１＝２通り。よって、２×２＝４通り



２）Ｄが２に座るとき



１と３の席にはＥは座ることは出来ないから、そこにはＢとＣが座らなければならないから、２×１＝２通り。残る４の席にＥが座る。よって、２通り。

３）Ｄが３に座るとき

これは上の２）と同じになるから、２通り。

４）Ｄが４に座るとき

これは上の１）と同じになる。４通り。

∴　４＋２＋２＋４＝１２通り

このように場合わけをして、きちんと数えることが基本となる。

３．上級レベルの問題と解説

〔No.　４〕３つの異なる容器Ａ～Ｃにリンゴ９個を盛るとき、何通りの盛り方があるか。ただし、ある容器が空になる場合も盛り方に数えるものとする。なお、リンゴを示す９個の○と容器の区別を示す２個の｜を並べた順列

○○○○｜○○｜○○○　　　　　○○○○○｜｜○○○○

のうち前者はＡに４個、Ｂに２個、Ｃに３個盛る方法に、後者はＡに５個、Ｂに０個、Ｃに４個を盛る方法に対応させることができる。

１．52 通り
２．55 通り
３．58 通り
４．61 通り
５．64 通り

〔No.　４　解説〕正答２

問題文の中に解答へのヒントがある。

問題文中には、９つのりんごを９個の丸で表し、それを２本の線で区切ることによって、３つの皿に盛ったときの状態を表す。例えば、

○○○○｜○○｜○○○

はＡＢＣに盛られたリンゴがそれぞれ４個｜２個｜３個。

○○○○○｜｜○○○○

はＡＢＣに盛られたリンゴがそれぞれ５個｜０個｜４個であることを表している。

ここで、リンゴは全部で９個であるから｜を置くことの出来る場所は、りんごとりんごの間、次の図の数字１～10 で書かれた 10 箇所である。

１○２○３○４○５○６○７○８○９○10

①　２つの線が同じ場所に入らない場合

線が入る場所は全部で 10 箇所のうち２箇所であるから、線が入る場所を２箇所選ぶということは、10 個の異なるものから 2 つを選ぶ組合せに等しいはずである。よって、

$${}_{10}C_{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45\text{ 通り}$$

②　２つの線が同じ場所に入る場合

２本とも一緒に入る場所は 10 通りである。

よって、求めるりんごの盛り方は、

∴　45 ＋ 10 ＝ 55 通り

〔No.　５〕それぞれ色の異なる丸い石が５個あり、中心に穴をあけてひもを通して首飾りを１つ作るとき、何通りの首飾りができるか。ただし、石は５個全部用いるものとし、ひもの結び目は考慮しないものとする。

1．　10 通り

2．　12 通り

3．　24 通り

4．　30 通り

5．　50 通り

〔No.　５　解説〕正答２

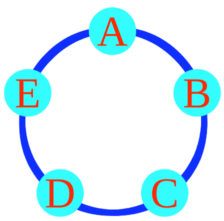
５つのものを全部並べる方法は、

$_5P_5$ ＝５×４×３×２×１＝１２０通り

である。従って色の異なる石を一列に並べれば１２０通りの並べ方があることがわかる。ところが、問題の条件より、石はひもに通して首飾りつまり輪を作らなければならない。この時、例えば５つの石をＡ～Ｅとすると、次のような５通りの並べ方を考えることが出来る。

ＡＢＣＤＥ　　ＢＣＤＥＡ　　ＣＤＥＡＢ　　ＤＥＡＢＣ　　ＥＡＢＣＤ

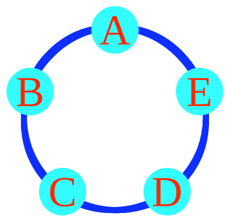
ところが、この５通りの石の並べ方をそれぞれ同じ向きに輪にすると、全て次の図のような並べ方となる。(図では右回りになっている)これは区別することが出来ないので１通りの並べ方と言える。



つまり、一列に並べると５通りある並べ方が、輪になったときには１通りとなるから、５つのものを輪にして並べると、

120÷５＝24 通り

の並べ方がある。また次の図のような並べ方がある。



これは、裏返すと前の図と重なることがわかる。つまり、一つの並べ方の表裏である。これより、本当は１つの並べ方が２通りと数えられていることがわかる。

∴　求める並べ方＝24÷２＝12 通り。

一般にｎ個のものを円にして並べると、全く同じ並べ方のものをｎ通りに重複して数えてしまうことになる。そこでこの重複を避けるためにｎで割ると正しい並べ方の数が求められる。このような並べ方を円順列という。

また石やビーズのように裏返すことが出来るものは、裏返して重なるものを重複して数えてしまっているので、これをなくすために２で割る必要がある。このような並べ方をじゅず順列という。